

## Révision été 2021

## Exercice 1

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(nx) = nf(x)$ .
2. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(nx) = nf(x)$ .
3. Soient  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$  et  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $f(r) = ar$  avec  $a = f(1)$ .
4. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , pour  $n \geq 1$  on pose  $r_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ .
  - (a) Montrer que la suite rationnelle  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x$ .
  - (b) Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax$ .

## Exercice 2

1. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right) \cos(kx) dx = \frac{1}{k^2}$
2. Soit  $x \in ]0, \pi]$ .

- (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , 
$$e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} e^{i \frac{(n+1)x}{2}}$$
- (b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , 
$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{nx}{2}) \cos(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

## Exercice 3

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , On pose :  $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .
  - (a) Montrer que les suites  $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes.
  - (b) Que peut-on en déduire pour la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ?
2. On pose :  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .
  - (a) Établir que  $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - (-1)^n I_n = A_n$ .
  - (b) En déduire la limite de la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

**Exercice 4**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ .

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
2. Montrer que  $J_n = 2I_n + nI_{n-1}$  est indépendant de  $n$ . Déterminer sa valeur.
3. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante puis, en utilisant la question 2., démontrer l'encadrement

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$$

4. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ .

**Exercice 5**

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des nombres distincts de  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $P_k$  la fonction polynôme définie par :

$$P_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - a_i}{a_k - a_i}$$

Calculer  $P_k(a_j)$ , pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ .

**Exercice 6**

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\forall t \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(t) = \frac{\arctan(t)}{t}$  et  $f(0) = 1$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , paire et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .
2. Montrer que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\int_0^t \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{t}{1+t^2} + \arctan(t)$  à l'aide d'une intégration par parties.
3. Montrer sans calculer l'intégrale que pour tout  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ ,  $0 \leq \int_0^t \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{2t^3}{3}$
4. de la même manière, déterminer un encadrement du même type pour tout  $t \in \mathbb{R}^-$  et déduire

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

5. En déduire que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = 0$

**Exercice 7**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

Soit  $a \in I$  et  $h > 0$  fixés tels que  $[a, a+h] \subset I$

On considère la fonction définie sur  $[0, h]$  :

$$\varphi : t \mapsto f(a+t) - f(a) - tf'(a) - \frac{t^2}{2}K$$

où  $K$  est un réel constant.

1. Justifier que la fonction  $\varphi$  est deux fois dérivable sur  $]0, h[$  et calculer  $\varphi'(t)$  et  $\varphi''(t)$  pour tout  $t \in ]0, h[$
2. Déterminer la constante  $K$  pour que  $\varphi(0) = \varphi(h)$
3. En déduire qu'il existe  $\alpha \in ]0, h[$  tel que  $\varphi''(\alpha) = 0$ .
4. En déduire qu'il existe  $c \in ]a, a+h[$  tel que :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(c)$$

**Exercice 8**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ .

1. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $] -1, 1[$ .
2. Déterminer, pour  $y \in ] -1, 1[$  une expression de  $f^{-1}(y)$  analogue à celle de  $f(x)$ .

**Exercice 9**

On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$(E_1): \quad y'' + \frac{1}{2x^2}y = 0$$

1. Soit  $y$  une solution de l'équation différentielle  $(E_1)$ .

On pose pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :  $z(t) = y(e^t)e^{-\frac{t}{2}}$ .

- (a) Exprimer  $y(x)$  en fonction de  $z(\ln(x))$  pour tout  $x > 0$ .
  - (b) Exprimer  $y'(x)$  et  $y''(x)$  en fonction de  $z(\ln(x))$ ,  $z'(\ln(x))$ , et  $z''(\ln(x))$
  - (c) En déduire que  $t \mapsto z(t)$  est solution d'une équation différentielle  $(E_2)$  à coefficients constants.
  - (d) Résoudre  $(E_2)$
2. Résoudre  $(E_1)$

**Exercice 10**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = 2$$

On considère la fonction  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(\tan(\frac{\pi x}{2})) & ; \quad x \in ]-1, 1[ \\ g(-1) = g(1) = 2 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe  $c \in ]-1, 1[$  tel que  $g'(c) = 0$ .
2. En déduire qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 11**

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \text{ si } x \notin \{0, 1\} \\ F(0) = 0 \text{ et } F(1) = \ln 2 \end{cases}$$

1. Etudier le signe de  $F$ .
2. Soit  $x > 0$  tel que  $x \neq 1$ . Calculer  $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$ .
3. Montrer que :  $\forall x \in ]0, 1[, \quad x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2$ .
4. Montrer que :  $\forall x > 1, \quad x \ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2$ .
5. En en déduire que  $F$  est continue aux points 0 et 1 et déterminer  $\lim_{+\infty} F$ .
6. Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$  et calculer  $F'(x)$  sur chacun de ses intervalles.

**Exercice 12**

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

1. Prouver que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée et monotone. Que peut-on en déduire ?
2. Etablir que pour tout  $k > 1$ ,  $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{x} \leq \int_k^{k-1} \frac{dx}{x}$
3. En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 13**

On pose  $I_0 = \int_0^1 e^{-x^2} dx$  et pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$ .
2. Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Calculer  $I_1$ .
4. Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e}$$

5. Déterminer la limite de  $nI_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
6. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $U_n = \frac{I_{2n+1}}{n!}$ .

(a) Établir  $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{2e} \frac{1}{(n+1)!}$ .

(b) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

**Exercice 14**

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$

**Exercice 15**

Pour  $z \neq i$ , on pose  $f(z) = \frac{z-2}{z+i}$ .

1. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que :
  - $f(z)$  est réel
  - $f(z)$  est imaginaire pur
  - $|f(z)| = 1$ .
2. Chercher les points fixes de  $f$  (i.e les  $z$  tels que  $f(z) = z$ ).

**Exercice 16**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $0 < a < b$ , et soit  $t > 0$ .

1. Déterminer  $\max(t^{a-1}, t^{b-1})$  selon les valeurs de  $t$ .
2. Montrer que  $\forall x \in [a, b], 0 < t^{x-1} < \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ .

**Exercice 17**

Soit  $p$  un nombre premier Positif.

1. Montrer que  $\forall k \in \{1, \dots, p-1\} \quad p \mid C_p^k$
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^p \equiv n[p]$

**Exercice 18**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  et  $u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ .

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$ .
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leq 2\sqrt{n+1} - 2$ .
3. La suite  $(S_n)$  est-elle convergente?
4. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 19**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Exprimer à l'aide de factoriels :

- a)  $2 \times 4 \times \dots \times (2n)$
- b)  $1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)$
- c) le terme général de la suite  $(u_n)$  définies par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} u_n$

**Exercice 20**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Calculer, pour  $x$  nombre réel, les sommes suivantes :

$$1) S_n = \sum_{k=1}^n kx^k \quad 2) S_n = \sum_{k=0}^n k \cos(kx) \quad 3) S_n = \sum_{k=0}^n k \sin(kx)$$

**Exercice 21**

Établir que la fonction  $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  n'admet pas une limite 0.

**Exercice 22**

Soient  $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables, telle que  $\forall x \in [a; b], g'(x) \neq 0$

1. Montrer que  $g(a) \neq g(b)$ .
2. Montrer qu'il existe  $c \in ]a; b[$  tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

3. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \implies \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$

**Exercice 23**

Pour  $x \in \mathbb{R} - \{k \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$$

Déterminer la valeur de  $S_n(x)$  en fonction de  $n$  et  $x$ .

**Exercice 24**

1. Montrer que, pour tout  $x$  réel, on a :  $\cos(3 \arctan x) = \frac{1 - 3x^2}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

**Exercice 25**

On considère la fonction  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  continue en 1 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x^2)$$

Montrer que  $f$  est une fonction constante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 26**

1. Montrer que, pour tout  $x$  réel, on a :  $\cos^2\left(\frac{1}{2} \arctan x\right) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{2\sqrt{1 + x^2}}$ .

**Exercice 27**

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x)$$

Montrer que  $f$  est une fonction constante.

**Exercice 28**

1. Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

2. En déduire, pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$$

**Exercice 29**

Montrer

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}), \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

**Exercice 30**

Calculer en fonction de  $n$  le terme général de la suite  $(u_n)$  définies par :

$$u_0 = 1, \text{ et } u_{n+1} = 2u_n + 3$$

**Exercice 31**

Soit  $A, B$  et  $C$  trois points distincts du plan complexe d'affixes  $a, b$  et  $c$ , respectivement.

1. Montrer que  $ABC$  est un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si :

$$a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{ou} \quad c + j^2a + jb = 0$$

2. Montrer que  $ABC$  est un triangle équilatéral si et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

**Exercice 32**

Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$$

**Exercice 33**

Soit  $w = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ . on pose :

$$a = w + w^2 + w^4 \quad \text{et} \quad b = w^3 + w^5 + w^6$$

1. Montrer que  $a$  et  $b$  sont conjugués et que la partie imaginaire de  $a$  est positive.
2. Calculer  $a + b$  et  $ab$ . En déduire  $a$  et  $b$

**Exercice 34**

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx$$

**Exercice 35**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $F_n = 2^{2^n} + 1$

1. Montrer que pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $F_n$  divise  $F_{n+k} - 2$
2. En déduire que pour  $p \neq q$ ,  $F_p \wedge F_q = 1$ .

**Exercice 36**

Calculer en fonction de  $n$  le terme général de la suite  $(u_n)$  définies par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + 2^n$$

**Exercice 37**

Calculer en fonction de  $n$  le terme général des suites  $(u_n)$  définies par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3(n+1)}{2n} u_n$$

**Exercice 38**

Calculer en fonction de  $n$  le terme général des suites  $(u_n)$  définies par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n^3$$

**Exercice 39**

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

**Exercice 40**

Soit  $w$  une racine septième de l'unité distincte de 1. Simplifier le nombre

$$\alpha = \frac{w}{1+w^2} + \frac{w^2}{1+w^4} + \frac{w^4}{1+w^6}$$

**Exercice 41**

Calculer les intégrales suivantes :

1)  $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \sin x dx$

2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$

3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^4 x dx$

4)  $\int_0^{\pi} \cos^3 x \sin^2 x dx$

**Exercice 42**

Soient  $a, b \in \mathbb{Z}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1.  $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$

2.  $a^n | b^n \iff a | b$