



A - Méthode de Newton

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable avec f'' continue sur $[a, b]$.

On suppose que :

- $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$;
- $\forall x \in [a, b], f'(x) < 0$;
- $\forall x \in [a, b], f''(x) > 0$.

Partie I. Étude d'une fonction.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$, que l'on notera c .
2. Soit $x_0 \in [a, b]$. Déterminer le point d'intersection, de la tangente à la courbe de f au point x_0 avec l'axe des abscisses.

On introduit la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [a, b], g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

3. Montrer que g est dérivable et que g' est continue sur $[a, b]$ et calculer sa dérivée.
4. Étudier les variations de g .
5. On admet l'existence d'un couple (m, M) de réels strictement positifs tels que

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \geq m \text{ et } |f''(x)| \leq M.$$

En appliquant successivement le théorème des accroissements finis à f et à f' , montrer l'existence d'un réel $L > 0$ tel que $\forall x \in [a, b], |g(x) - c| \leq L|x - c|^2$.

Partie II. Étude d'une suite.

Soit $(u_n)_n$ la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

6. Montrez que la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par c .
7. Montrez que la suite $(u_n)_n$ converge vers c .
8. À l'aide de la question 5., montrez qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - c| \leq k \left(\frac{c - a}{k} \right)^{2^n}.$$

B - Tout premier de la forme $4m + 1$ est somme de deux carrés

On se propose de montrer que pour tout nombre p premier de la forme $4m + 1$; il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$.

Soit $S = \{(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid x^2 + 4yz = p\}$ et considérons les ensembles

$$S_1 = S \cap \{(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid x < y - z\}$$

$$S_2 = S \cap \{(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid y - z < x < 2y\}$$

$$S_3 = S \cap \{(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid 2y < x\}$$

1. Justifier que S est un ensemble fini.
2. Montrer que si $y, z \in \mathbb{N}^*$, alors $(y - z, y, z) \notin S$ et $(2y, y, z) \notin S$.
3. En déduire que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Considérons l'application f définie sur S par :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z); & \text{si } (x, y, z) \in S_1 \\ (2y - x, y, x - y + z); & \text{si } (x, y, z) \in S_2 \\ (x - 2y, x - y + z, y); & \text{si } (x, y, z) \in S_3 \end{cases}$$

On dit que f admet un point fixe dans S , si $\exists (x_0, y_0, z_0) \in S$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

4. Montrer les inclusions

$$f(S_1) \subset S_3, f(S_2) \subset S_2, f(S_3) \subset S_1.$$

5. En déduire que $f(S) \subset S$.

6. Vérifier que $\forall (x, y, z) \in S, f(f(x, y, z)) = (x, y, z)$.

7. Justifier les égalités

$$f(S) = S, f(S_1) = S_3, f(S_2) = S_2, f(S_3) = S_1$$

8. f peut-elle avoir un point fixe dans S_1 ? dans S_3 ? Justifier votre réponse.

9. Montrer que f admet un unique point fixe sur S qu'en déterminera.

10. En déduire que le cardinal de S est impair.

11. On considère l'application $g : S \rightarrow S$:

$$(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$$

(a) Justifier que $\forall (x, y, z) \in S, g(g(x, y, z)) = (x, y, z)$ et que g possède au moins un point fixe dans S .

(b) en déduire finalement que p s'écrit comme somme de deux carrés d'entiers naturels.

12. On se propose de montrer que la décomposition $p = a^2 + b^2$ est unique, à interversion près de a et b .

Supposons que $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ où $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $(ad - bc)(ad + bc) \equiv 0 [p]$, puis que $p|ad - bc$ ou $p|ad + bc$.

(b) On suppose que $p|ad - bc$.

i. Vérifier que $p^2 = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$.

ii. En déduire que $a = c$ et $b = d$.

(c) On suppose que $p|ad + bc$.

i. Vérifier que $p^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$.

ii. En déduire que $a = d$ et $b = c$.

C - Une dérivation sous le signe intégral et intégrale de Gauss

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(\frac{-x}{\cos^2(t)}\right) dt.$$

et F l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x e^{-u^2} du.$$

En admettant que F admet une limite réelle en $+\infty$, on se propose de calculer cette limite.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.

2. (a) Montrer par récurrence que pour $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, e^u = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^u (u-t)^n e^t dt.$$

(b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, \left| e^u - \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} \right| \leq \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|u|}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $h \in \mathbb{R}^*$. On pose

$$\Delta(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)} \exp\left(\frac{-x}{\cos^2(t)}\right) dt.$$

Transformer l'expression de $\Delta(h)$, puis majorer $|\Delta(h)|$.

(b) Vérifier que $\forall h \in \mathbb{R}^*, \forall t \in [0, \frac{\pi}{4}], |h| \leq \frac{|h|}{\cos^2(t)} \leq 2|h|$.

(c) En déduire que f est dérivable en x et que

$$f'(x) = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)} \exp\left(\frac{-x}{\cos^2(t)}\right) dt.$$

4. À l'aide d'un encadrement de f , montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

5. Soit x un réel. Déterminer une expression de $F(x)$ en effectuant le changement de variable $u = x \cdot \tan(t)$.

6. On définit l'application g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x^2)$.

(a) Pour x dans $\mathbb{R}$, exprimer $g'(x)$ en fonction de $F(x)$.

(b) En déduire une expression de g à l'aide de F^2 .

(c) Déduire des questions précédentes que F tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en $+\infty$.

D - Générateurs du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$

Soit $SL_2(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de déterminant 1.

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid ad - bc = 1 \right\}$$

On considère les deux matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On se propose de montrer que toute matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ est produit de matrices appartenant à $\{S, T, T^{-1}\}$, c'est à dire produit des matrices S, T et T^{-1} . On note cet ensemble $\langle S, T \rangle$.

1. Calculer S^2 et montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que si $M \in \langle S, T \rangle$, alors $-M \in \langle S, T \rangle$.

Soit alors $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Quitte à remplacer M par $-M$, on peut supposer que $c \in \mathbb{N}$.

On va établir le résultat souhaité par récurrence sur $c \in \mathbb{N}$.

3. On suppose que $c = 0$.

(a) Montrer que M est de l'une des formes $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{Z}$.

(b) En déduire que dans les deux cas, $M \in \langle S, T \rangle$.

4. On suppose l'hypothèse de récurrence : Toute matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $0 < z \leq c-1$ est dans $\langle S, T \rangle$.

On fait la division euclidienne de a par c , $a = qc + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < c$.

(a) Vérifier que $ST^{-q}M = \begin{pmatrix} u & v \\ r & w \end{pmatrix}$ où u, v, w à déterminer.

(b) Appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure que $M \in \langle S, T \rangle$.