

TP N° 8 : Polynômes, fractions rationnelles

I- Polynômes

a. Définition d'un polynôme

Matlab définit le polynôme sous forme d'un " vecteur " qui contient les coefficients du polynôme par ordre décroissant en degré de x. A titre d'exemple, pour définir le polynôme $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ on écrit :

```
>> p = [3 -5 2]
p=
3 -5 2
```

b. Racine d'un polynôme

Pour trouver les racines d'un polynôme on applique la fonction roots

```
>> racines = roots(p)
racines =
1.0000
0.6667
```

On peut aussi écrire :

```
>> racines = roots([ 3 -5 2 ])
racines =
1.0000
0.6667
```

Exercice d'application

Trouvez les racines des polynômes :

- a) $P_1(x) = 14x^5 - 7x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 6x + 2.$
- b) $P_2(x) = -5x^7 - 7x^6 - 20x^3 + 5x^2 + 6x + 50.$
- c) $P_3(x) = 30x^{10} - 34x^{14} - 10x^3 + 100x^{12} + 16x + 30.$

Résoudre dans R et dans C les équations suivantes :

- d) $7x^6 - 10x^5 + 20x^2 + 6x + 2 = 14x^5 - 7x^6 - 10x^5 + 20x^3 + 6x + 2.$
- e) $14x^4 + 8x + 2 = 20x^4 - 4x^3 + 20x^2 + 6x + 2.$

Indi : transformer les équations en une équation de la forme $P(x)=0$ et appliquer la fonction roots

c. Détermination des coefficients d'un polynôme à partir de ses racines

On utilise la fonction **poly** pour déterminer les coefficients d'un polynôme à partir de ses racines :

```
>> a=[1 2]
a=
1 2
>> P = poly(a)
P =
1 -3 2
```

Dans ce code, on cherche le polynôme dont les racines sont 1 et 2, ce polynôme est : $x^2 - 3x + 2$

Remarque :

- a) la fonction **poly** possède deux syntaxes :
- poly(vecteur)** : renvoie le polynôme unitaire dont les racines sont les éléments du vecteur en argument
 - poly(matrice)** : renvoie le polynôme caractéristique de la matrice en argument $\det(A-xI_n)$
- b) Si P est un polynôme, alors $P = \text{poly}(\text{roots}(P)) * a_n$; avec a_n est le coefficient dominant le p ; car poly renvoie toujours le polynôme unitaire dont les racines sont les éléments du vecteur en argument.

Exercice d'application

- a) Trouvez le polynôme dont les racines sont : $x_1=2$; $x_2=-5$; $x_3=7$; $x_4=20$; $x_5=-10$;
- b)** Trouvez le polynôme caractéristique de la matrice carrée d'ordre 3 $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

d. Produit de deux polynômes

Pour calculer le produit de deux polynômes, on utilise la fonction **conv**,

Exemple : $(x-2)(x-1) = ???$

```
>> p1=[1 -1];
>> p2=[1 -2];
>> P=conv(p1,p2)
P= 1 -3 2
```

c'est-à-dire : $(x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$

Remarque : la fonction **conv** possède uniquement deux paramètres d'entrée, c'est-à-dire que vous ne pouvez pas calculer directement le produit de trois polynômes P1, P2, P3 en utilisant la syntaxe ~~**conv(P1, P2, P3)**~~, par contre la syntaxe **conv(conv(P1, P2), P3)** peut faire la faire.

Conv2 (p1,p2,p3,p4.....pn)

Exercice d'application

Calculez les produits suivants :

- $P(x) = (7x^6 - 10x^5 + 20x^2 + 6x + 2) \times (14x^5 - 7x^6 - 10x^5 + 20x^3 + 6x + 2)$
- $Q(x) = (14x^4 + 8x + 2) \times (20x^4 - 4x^3 + 20x^2 + 6x + 2)$
- $P(x) \times (14x^5 - 7x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 6x + 2)$
- $Q(x) \times (-5x^7 - 7x^6 - 20x^3 + 5x^2 + 6x + 50)$
- $P(x) \times Q(x)$

e. Division de deux polynômes

Pour la division euclidienne de deux polynômes, on utilise la fonction **deconv**.

```
>> a = [1 2 3 4];
>> b = [1 4 9 16];
>> c=conv(a,b)
c =
    1     6    20    50    75    84    64
>> deconv(c,b) % le quotient de la division est affecté à ans
ans =
    1     2     3     4
>> q = deconv(c,b) % le quotient de la division est affecté à q
q =
    1     2     3     4
>> [q,r] = deconv(c,b) % q : le quotient et r : le reste de la division
q =
    1     2     3     4
r =
    0     0     0     0     0     0 % le reste est 0 car "c" est le produit de a et b
%vous ne pouvez pas calculer uniquement r le reste de la division
```

Exercice d'application

Calculer le quotient $P(x)$ et le reste $R(x)$ de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants

- a) $A(x) = 7x^6 - 10x^5 + 20x^2 + 6x + 2$; $B(x) = x^3 + 5x + 3$
 b) $A(x) = x^{10} - 10x^8 + 20x^3 + 6x + 2$; $B(x) = 4x^2 + 6x + 12$
 c) $A(x) = x^8 - 10x^7 + 20x^5 + 20x + 2$; $B(x) = x^4 + 4x + 8$

f. Evaluation d'un polynôme en un point

Considérons le polynôme $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ et un point $x_0=1$ nous voulons calculer $P(x_0) = ?$

```
>> p = [ 3 -5 2 ]
p =
     3     -5      2
>> x0 = 1
x0 =
     1
>> P_X0 = polyval( p , x0 )% P_X0 est juste une notation de P(x0)
P_X0 =
     0
```

Nous avons également la fonction **polyvalm** qui permet de calculer $P(A)$ avec A une matrice, la différence entre `polyval(p,A)` et `polyvalm(p,A)` : la première utilise la multiplication (en calculant la puissance) élément par élément par contre la deuxième utilise la multiplication matricielle.

Exercice d'application

Soit $P(x) = 7x^6 - 10x^5 + 20x^2 + 6x + 2$ et $Q(x) = 14x^5 - 7x^6 - 10x^5 + 20x^3 + 6x + 2$

Calculer :

- a) $P(1)$; $P(5)$; $P(100)$; $P(999)$
 b) $P(999) \times Q(999)$
 c) Les 10 premières valeurs de la série numérique $P(n)_{n \in \mathbb{N}}$ (indication utiliser le vecteur 1 :10)

Considérons les matrices A , B et C suivantes :

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ A & B & B & B & A & B & B & B & A \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 24 & 40 & 2 & 5 & 4 & 53 & 31 \end{bmatrix}$ $C =$

- d) Calculer $P(A)$; $P(B)$ et $P(C)$ (Indication : utiliser la fonction `polyvalm()` qui utilise multiplication matricielle).
 e) Calculer la matrice constituée par les éléments $P(x_{ij})_{ij}$, avec les x_{ij} sont les composantes de la matrices A (Indication : utiliser la fonction `polyval()` qui utilise la multiplication élément par élément).

g. Représentation graphique d'un polynôme

```
>>x = linspace(-1,3,100)
>> p = [1 4 -7 -10]
>> v = polyval(p,x)
>>plot(x,v)
title('courbe de P')
```

Remarque : vous pouvez utiliser la fonction **fplot** selon la syntaxe suivante :

```
>> fplot ( '3*x^2 - 5*x + 2' , [ 0 2 ] )
```

h. Dérivation d'un polynôme

On dérive une fonction polynômiale en utilisant la fonction **polyder**, ainsi pour dériver

$p(x)=3x^5-2x^3+x+5$:

```
p = [3 0 -2 0 1 5];
q = polyder(p)
q = 1*5
```

15	0	-6	0	1
----	---	----	---	---

La fonction **polyder** à trois syntaxes :

k = polyder(p) : renvoie un vecteur représentant le polynôme dérivé du polynôme P

k = polyder(a,b) : renvoie un vecteur représentant le polynôme dérivé du produit $a(x)*b(x)$

[q,d] = polyder(a,b) : renvoie deux polynômes q et d tel que $\frac{q(x)}{d(x)}$ est la dérivée de $\frac{a(x)}{b(x)}$

Vous pouvez voir des exemples dans le help de polyder en tapant **help polyder** dans la ligne de commande de Matlab ou bien en consultant le lien:

<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/polyder.html>

Exercice d'application

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 14x^5 - 7x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 6x + 2.$

b) $g(x) = -5x^7 - 7x^6 - 20x^3 + 5x^2 + 6x + 50.$

c) $h(x) = (7x^6 - 10x^5 + 20x^2 + 6x + 2) \times (14x^5 - 7x^6 - 10x^5 + 20x^3 + 6x + 2)$

d) $\frac{7x^6 - 10x^5 + 20x^2 + 6x + 2}{20x^3 + 6x + 2}$

i. Intégration d'un polynôme

On intègre une fonction polynômiale en utilisant la fonction **polyint**, nous rappelons que la fonction **polyint** a deux syntaxes : **polyint(Polynôme)** et **polyint(Polynôme, constante)** :

Pour calculer l'intégral :

$$I = \int_{-1}^3 (3x^4 - 4x^2 + 10x - 25)dx.$$

On utilise le programme suivant :

```
p = [3 0 -4 10 -25];
I = diff(polyval(polyint(p), [-1 3]))
```

Pour l'intégral

$$I = \int_0^2 (x^5 - x^3 + 1)(x^2 + 1)dx$$

```
p = [1 0 -1 0 0 1];
v = [1 0 1];
I = diff(polyval(polyint(conv(p,v)), [0 2]))
```

II- Fractions rationnelles : Décomposition en éléments simples

La décomposition en fractions partielles ou en éléments simples d'une fraction rationnelle est son expression sous une somme de fractions ayant pour dénominateurs des puissances de polynômes irréductibles et pour numérateurs un polynôme de degré inférieur au polynôme irréductible du dénominateur. Cette décomposition est utilisée dans le calcul intégral pour faciliter la recherche des primitives de la fonction rationnelle associée.

Pour décomposer une fraction rationnelle en éléments simples, la fonction **residue** renvoie trois vecteurs r, p et k tels que :

$$\frac{n(x)}{d(x)} = \frac{r_1}{x - p_1} + \frac{r_2}{x - p_2} + \dots + k(x)$$

Exemple :

$$\frac{6}{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x} = ?$$

```
>> n = [ 6 ] %polynôme du numérateur
n =
6

>> d = [ 1 6 11 6 0 ] %polynôme du dénominateur
d =
1 6 11 6 0
>> [r , p , k ] = residue ( n , d)
r =
-1.0000
3.0000
-3.0000
1.0000
p =
-3.0000
-2.0000
-1.0000
0
k =
[ ]
```

L'interprétation de ce résultat est :

$$\frac{6}{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x} = \frac{-1}{x+3} + \frac{3}{x+2} + \frac{-3}{x+1} + \frac{1}{x}$$

Si vous voulez obtenir $\frac{6}{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x}$ à partir de $\frac{-1}{x+3} + \frac{3}{x+2} + \frac{-3}{x+1} + \frac{1}{x}$ vous pouvez utiliser la même fonction **residue**

```
>> [n ,d] = residue (r , p , k)
N =
6
d =
1 6 11 6 0
```

Autre exemple

Trouver la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{2s^3 + s^2}{s^3 + s + 1}$$

```
b = [2 1 0 0];
a = [1 0 1 1];
[r,p,k] = residue(b,a)
r = 3×1 complex

0.5354 + 1.0390i
0.5354 - 1.0390i
-0.0708 + 0.0000i

p = 3×1 complex

0.3412 + 1.1615i
0.3412 - 1.1615i
-0.6823 + 0.0000i

k = 2
```

Cela veut dire que :

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{2s^3 + s^2}{s^3 + s^2 + 1} = \frac{0.5354 + 1.0390i}{s - (0.3412 + 1.1615i)} + \frac{0.5354 - 1.0390i}{s - (0.3412 - 1.1615i)} + \frac{-0.0708}{s + 0.6823} + 2.$$

III- Références

Ref1 : <https://www.mathworks.com/help/matlab/>

Ref2 : https://www.academiepro.com/uploads/cours/2015_10_15_tp4-polynomes.pdf

Ref3 : http://fractale.gecif.net/si/logiciels/matlab/matlab_ingenieur_oct2010.pdf

https://www.academiepro.com/uploads/cours/2015_10_16_emd2011info4sol.pdf

Annexe : Application en mécanique

a. Mise en valeur de résultats expérimentaux : caractéristique d'un ressort

On considère un ressort que l'on tend plus ou moins tout en mesurant la force qui lui est appliquée à l'aide d'un dynamomètre dont la précision est d'environ 0.5 [N].

Les résultats que l'on a obtenus sont les suivants :

Longueur [cm]	4.2	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0
Force [N] $\pm 1 / - 0.5$ [N]	0.0	1.1	2.0	3.2	3.9	4.6	5.8	7.0	8.3	9.0	9.5

Dans ce qui suit, on souhaite :

1. Tracer le graphe de la force en fonction de la longueur avec les barres d'erreurs.
2. Mettre en valeur le graphe à l'aide d'un titre et d'informations portées sur l'abscisse et l'ordonnée.
3. Rechercher une loi polynomiale représentant au mieux cette caractéristique ; celle d'un ressort est généralement linéaire, éventuellement cubique.
4. Mesurer la qualité des modèles proposés pour représenter le ressort.
5. Afficher les informations sur le graphe lui-même.

Un programme réalisant le cahier des charges demandé peut être le suivant :

```
% Exemple de traitement des donnees
clear all ;
close all ;
format compact ;
format short g ;

% elongation d'un ressort : valeurs mesurees
x = [4.2 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0 12.0 13.0 14.0] ; % [cm]
force = [0.0 1.1 2.0 3.2 3.9 4.6 5.8 7.0 8.1 9.0 9.5] ; % [N]

% vecteurs des erreurs
ErrNeg = -0.5*ones(size(force)) ;
ErrPos = +1.0*ones(size(force)) ;

% graphes des mesures
plot(x,force,'o') ;

% regressions lineaire et cubique
coeff1 = polyfit(x,force, 1) % coeff. du polynôme d'ordre 1
coeff3 = polyfit(x,force, 3) % coeff. du polynôme d'ordre 3

% calcul des graphes des modeles d'ordre 1 et 3
xfit = linspace(0,20,201) ; % abscisse plus fine (200 points)
F1 = polyval(coeff1,xfit) ; % valeurs du polynôme d'ordre 1
F3 = polyval(coeff3,xfit) ; % valeurs du polynôme d'ordre 3

% tracage des mesures avec erreurs et des modeles
errorbar(x,force,ErrNeg, ErrPos,'o') ;
hold on ;
grid on ; % maintien du graphe et pose d'une grille
plot (xfit,F1, xfit,F3,'--') ;
axis ([0 20 -5 13]) ;
title('Force d un ressort') ;
xlabel('x [cm]') ;
ylabel('F(x) [N]') ;
```

```

% affichage des infos
texte = ['F_1(x) = ', num2str(coeff1(1),3), ' x + '];
texte = [texte, num2str(coeff1(2),3)] ;
text(1,11, texte) ;
texte = ['F_3(x) = ', poly2str(coeff3,'x')] ;
text(2.1,-3, texte) ;

% ecart type = sigma = mesure de la dispersion des ecart
F1 = polyval(coeff1, x) ; % valeurs du modele d'ordre 1
ecart1 = force - F1 ;
eqm1 = sum(ecart1 .^ 2)/length(ecart1) ;
sigma1 = sqrt(eqm1) ;
text (1,10.2, ['\sigma_1 = ', num2str(sigma1,3), ' [N]']) ;

F3 = polyval(coeff3, x) ; % valeurs du modele d'ordre 3
ecart3 = force - F3 ;
eqm3 = sum(ecart3 .^ 2)/length(ecart3) ;
sigma3 = sqrt(eqm3) ;
text (2.1,-3.8, ['\sigma_3 = ', num2str(sigma3,3), ' [N]']) ;
print -deps ressort.eps

```

Les résultats sont présentés dans la figure

